
This is an electronic reprint of the original article.
This reprint may differ from the original in pagination and typographic detail.

Freund, Jouni; Salonen, Eero Matti

Sekaformulaatio, tasomuodonmuutostila ja kolmisolmuinen kolmioelementti

Published in:
Rakenteiden mekaniikka

DOI:
[10.23998/rm.136079](https://doi.org/10.23998/rm.136079)

Julkaistu: 01/01/2023

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Published under the following license:
CC BY

Please cite the original version:
Freund, J., & Salonen, E. M. (2023). Sekaformulaatio, tasomuodonmuutostila ja kolmisolmuinen kolmioelementti. *Rakenteiden mekaniikka*, 56(4), 161-178. <https://doi.org/10.23998/rm.136079>

This material is protected by copyright and other intellectual property rights, and duplication or sale of all or part of any of the repository collections is not permitted, except that material may be duplicated by you for your research use or educational purposes in electronic or print form. You must obtain permission for any other use. Electronic or print copies may not be offered, whether for sale or otherwise to anyone who is not an authorised user.

Sekaformulaatio, tasomuodonmuutostila ja kolmisolmuinen kolmioelementti

Jouni Freund¹ ja Eero-Matti Salonen

Tiivistelmä Artikkelissa tarkastellaan sekaformulaation ja elementtimenetelmän soveltamista tasomuodonmuutostapauksessa Galerkin-pienimmän neliön keinoa käyttäen. Täysin kokoonpuristumattoman aineen lisäksi käsitellään erityisesti myös yleistä kokoonpuristuvaa tapausta. Ainemallina on isotrooppinen Hooken laki. Numeerisissa sovelluksissa käytetään kolmisolmuista kolmioelementtiä. Suoritetaan vertailua puhtaalla siirtymäformulaatiolla saatuihin tuloksiin. Sensitointiparametrin arvon määrittäminen kuvataan.

Avainsanat: sekaformulaatio, paineyhtälö, Galerkin-pienimmän neliön keinon elementtimenetelmä, sensitointiparametri

Vastaanotettu: 28.8.2023. *Hyväksytty:* 28.11.2023. *Julkaistu verkossa:* 29.12.2023.

TkT Djebar Baroudin ja TkL Jari Laukkasen muistolle

Johdanto

Puhtaaseen siirtymäformulaatioon perustuva elementtimenetelmä ei tunnetusti toimi täysin kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa. Tavanomainen keino kiertää ongelma on soveltaa sekaformulaatiota (engl. mixed formulation) eli ottaa perustuntemattomaksi siirtymäkomponenttien lisäksi myös niin sanottu keskipaine (engl. mean pressure). Lisäksi tiedetään, että kirjanpidollisesti miellyttävä tapa valita painesolmuarvot (siis samoihin solmupisteisiin kuin siirtymäsolmuarvot) vaatii onnistuakseen esimerkiksi Galerkin-pienimmän neliön keinon käyttöä ([1], [2]); pelkkä Galerkinin keino ei toimi.

Tässä artikkelissa tarkastellaan sekaformulaation soveltamista tasomuodonmuutostilassa paitsi kokoonpuristumattomassa tapauksessa myös yleisemmin. Tavoitteena on havainnollistaa eräitä käsittelyyn liittyviä piirteitä, jotka eivät tule esille puhtaan siirtymäformulaation yhteydessä. Esimerkkitapauksia esitetään kolmisolmuisen kolmioelementin yhteydessä ja tehdään vertailuja puhtaan siirtymämenetelmän antamien tulosten

¹Vastuullinen kirjoittaja: jouni.freund@aalto.fi

kanssa. Galerkin-pienimmän neliön keinoon liittyvän sensitoointiparametrin määrittäminen selostetaan.

Perusyhtälöt

Tarkastellaan kaksidimensioista tasomuodonmuutostapausta ja sovelletaan karteesisia suorakulmaisia x, y -koordinaatteja ja pienten siirtymien teoriaa. Tasomuodonmuutostilan otaksutusta merkitsee, että z -akselin suuntainen siirtymäkomponentti w häviää ja siis vastaava muodonmuutoskomponentti $\varepsilon_z = 0$ ja lisäksi $\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$. Otaksutaan tavallinen isotrooppinen Hooken lain mukainen materiaalmalli. Materiaali tulee täysin kokoonpuristumattomaksi, kun Poissonin luku saa arvon $1/2$. Puhdasta siirtymäformulaatiota soveltavassa elementtimenetelmässä tulee numeerisia ongelmia, kun Poissonin luku lähestyy kyseistä arvoa.

Hooken laki voidaan esittää muodossa

$$\sigma_x = 2G(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_v), \quad \sigma_y = 2G(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_v), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy}, \quad (1)$$

jossa niin sanottu dilataatio eli suhteellinen tilavuudenmuutos (engl. dilatation, volume strain)

$$\varepsilon_v \equiv \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad (2)$$

ja jossa G on liukukerroin ja ν Poissonin luku. Muiden merkintöjen sisältö otaksutaan tutuksi. Määritellään keskipaine

$$p \equiv \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (3)$$

Suureet ε_v ja p ovat invariantteina (arvo ei muutu koordinaatiston kierrossa) jatkos kannalta tärkeitä muuttujia. Keskipaine määritellään kirjallisuudessa tavallisesti suureena $-(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$; esimerkiksi [3]. Tässä sovellettu "kaksidimensioinen" muoto (3) yksinkertaistaa hieman lopullisesti syntyviä lausekkeita. Lisäksi kaavassa (3) on toimitettu lähteen [2] tapaan ilman miinusmerkin käyttöä.

Kahden ensimmäisen kaavan (1) puolittainen yhteenlasku ja keskipaineen määrittämisen soveltaminen antaa tuloksen

$$p = K^P \varepsilon_v, \quad (4)$$

jossa niin sanottu puristuvuuskerroin (engl. bulk modulus)

$$K^P = \frac{G}{1-2\nu}. \quad (5)$$

Yhtälöä (4) tullaan nimittämään tässä ja jatkossa (eri muodoissaan) paineyhtälöksi. Paineyhtälö on sekaformulaatiossa tarvittava tasapainoyhtälöitä täydentävä oleellinen lisäyhtälö. Paineyhtälö on siis konstitutiivinen materiaalin käyttäytymistä kuvaava yhtälö,

kun taas jäljempänä esitetyt tasapainoyhtälöt (11) ja (12) pätevät materiaalista riippumatta. Huomautettakoon vielä, että tässä määritelty puristuvuuskerroin K^p poikkeaa kirjallisuudessa esitetystä tavanomaisesta lausekkeesta $K = G 2(1 + \nu) / [3(1 - 2\nu)]$.

Ottamalla huomioon kaavat (4) ja (5) Hooken laki (1) tulee keskipaineen sisältävään muotoon

$$\sigma_x = G(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + p, \quad \sigma_y = G(\varepsilon_y - \varepsilon_x) + p, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (6)$$

Vallitsevat kinemaattiset yhteydet ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (7)$$

jossa u ja v ovat x - ja y -akselin suuntaiset siirtymäkomponentit. Takaisin alkuperäiseen esitysmuotoon päädytään sijoittamalla paineeseen liittyvä konstitutiivinen yhteys (4) lausekkeisiin (6). Sekaformulaatiossa keskipainetta pidetään kuitenkin yhtenä perustuntemattomista.

Paineyhtälö kirjataan vielä siirtymäkomponentit mukana olevaan (residuaali)muotoon

$$R_p \equiv \varepsilon_v - \frac{1}{K^p} p \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{K^p} p = 0. \quad (8)$$

Tämä on sekaformulaation perustuntemattomissa u , v , p esitetty paineyhtälö.

Siirrytään kinetiikkaan. Tasapainoyhtälöt ovat

$$R_u \equiv \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0, \quad (9)$$

$$R_v \equiv \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_y = 0, \quad (10)$$

joissa b_x ja b_y ovat annetut voimat (tilavuutta kohti). Jos G ja ν otaksutaan paikan suhteen vakioiksi, saadaan aikaisemmat konstitutiiviset ja kinemaattiset riippuvuudet huomioon ottaen yhtälöt

$$R_u = G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} + b_x = 0, \quad (11)$$

$$R_v = G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} + b_y = 0. \quad (12)$$

Nämä ovat sekaformulaation perustuntemattomissa u , v , p esitetyt tasapainoyhtälöt. Yhtälöt ovat samaa muotoa kuin kaksidimensioista niin sanottua Stokesin virtausta (hidasta kokoonpuristumatonta viskoosia virtausta) kuvaavat yhtälöt. Suureet u ja v ovat tällöin virtauksen nopeuskomponentit ja G on nesteen viskositeetti. Stokesin problemaa on käsitelty paljon myös elementtimenetelmän avulla ja arvattavasti näitä sovelluksia voi-

daan sopivasti laajentaen hyödyntää myös kiinteän aineen mekaniikassa. Muun muassa viitteessä [2, s. 333] on juuri tähän liittyvä huomautus koskien viitettä [1], joka käsittelee Stokesin problemaa Galerkin-pienimmän neliön keinon avulla.

Saattaa aluksi tuntua tarpeettomalta kirjata yksityiskohtaisesti esille ylläesitettyjä kaavoja, koska tasapainoyhtälöiden sijasta on yleensä totuttu aloittamaan elementtime-
netelmän käsittely suoremmin virtuaalisen työn periaatteen avulla (johon itse asiassa pa-
lataan seuraavassa luvussa.) Mutta Galerkin-pienimmän neliön keinon yhteydessä pie-
nimmän neliön keinon soveltamisessa tullaan kuitenkin tarvitsemaan yhtälöitä (11) ja
(12).

Sekaformulaation reunaehdot muodostuvat samaan tapaan kuin puhtaassa siirtymä-
formulaatiossa annetuista siirtymistä ja traktioista. Jos reunaehdot koskevat kuitenkin
pelkästään siirtymiä ja kyseessä on täysin kokoonpuristumaton tapaus, siirtymien tulee
toteuttaa tunnetusti ehto

$$\int_s (n_x u + n_y v) ds = 0. \quad (13)$$

Tässä integraali on tarkasteltavan tasoalueen reunan s yli ja n_x ja n_y ovat reunan yksik-
kõnormaalivektorin komponentit. Tällöin keskipaineen jakauma ei myöskään määräydy
ellei siitä anneta jokin lisätieto kuten arvo tietyssä pisteessä.

Heikot muodot

Elementtimenetelmän lähtökohtana ovat tunnetusti differentiaaliyhtälöiden (eli niin sa-
nottujen vahvojen muotojen) sijasta niin sanotut heikot muodot (engl. weak forms). On
tavallaan "onnekas sattuma", että puhtaassa siirtymäformulaatiossa heikkona muotona
käytetään juuri virtuaalisen työn periaatetta, jossa testi- eli painofunktioina ovat siirty-
mien variaatiot δu ja δv eli virtuaaliset siirtymät. Virtuaalisen työn periaate on meka-
niikan tuntijalle tuttu jo muista yhteyksistä, joten periaatteen soveltaminen elementtime-
netelmän yhteydessä voi siis tapahtua juohevasti. Kun nyt siirrytään sekaformulaatioon
ja mukaan tulee vielä pienimmän neliön keinon antama lisäosuus, käsittely mutkistuu
huomattavasti. Jatketaan kirjoittamalla ensin yleinen heikko muoto

$$\delta W \equiv \delta W^V + \delta W^P + \delta W^{LS} = 0, \quad (14)$$

jonka eri osuuksia tullaan selostamaan seuraavassa.

Sisäisten voimien, tilavuusvoiman ja pintavoiman virtuaalisen työn lauseke on muo-
toa

$$\begin{aligned} \delta W^V = & - \int_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dA + \\ & + \int_A (\delta u b_x + \delta v b_y) dA + \int_{s_t} (\delta u t_x + \delta v t_y) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Merkintä A tarkoittaa tarkasteltavan kappaleen täyttämää tasoaluetta ja s sen reunaan.
Erityisesti s_t viittaa reunan niin sanottuun traktio-osaan, jolla traktiokomponentit t_x ja
 t_y ovat annetut. Reunan osalla s_u , jolla siirtymäkomponentit u ja v ovat annetut, vas-

taavat variaatiot asetetaan nolliksi. Yhtälön merkkivalinta on tehty niin, että positiivisten voimakomponenttien ja positiivisten virtuaalisten siirtymien tapauksessa vastaava virtuaalinen työ on positiivinen. Soveltamalla riippuvuuksia (6) saadaan yksityiskohtaisempi esitys

$$\begin{aligned} \delta W^V = & -\int_A (\delta(\varepsilon_x - \varepsilon_y))G(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \delta\gamma_{xy}G\gamma_{xy} dA - \int_A (\delta\varepsilon_v p) dA + \\ & + \int_A (\delta u b_x + \delta v b_y) dA + \int_{s_t} (\delta u t_x + \delta v t_y) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Se, että mukana on nyt puhtaaseen siirtymämenetelmään verrattuna myös paineosuus ei ymmärrettävästi muuta sovellettavia testifunktioita.

Paineyhtälöön (8) liittyvä heikon muodon osuus syntyy tässä ottamalla testifunktioksi $-\delta p$:

$$\delta W^P = -\int_A \delta p \left(\varepsilon_v - \frac{1}{K^P} p \right) dA. \quad (17)$$

Nyt on siis täytynyt tehdä valinta käytetystä testifunktiosta. Tuntuu intuitiivisesti luontealta ottaa siksi juuri paineen variaatio δp (eikä esimerkiksi δu tai δv), mutta miksi miinusmerkki? Aiheeseen liittyvää matematiikkaa on käsitelty liitteessä B.

Kokoonpuristumattomassa tapauksessa kun $K^P \rightarrow \infty$, päädytään tavanomaiseen Stokesin probleeman esitykseen ja esimerkiksi käytännössä mukavan paloittain lineaarisen approksimaation käytön siirtymälle ja paineelle tiedetään johtavan toimimattomaan menetelmään. Lisätään ongelman korjaamiseksi heikkoon muotoon yhtälöihin (11) ja (12) perustuva pienimmän neliösumman termi

$$\delta W^{LS} = \int_A \delta \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix}^T [\boldsymbol{\tau}] \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix} dA, \quad (18)$$

jossa esiintyvä sensitointimatriisi yksinkertaistettuna muotoon

$$[\boldsymbol{\tau}] = \tau \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

riippuu muun muassa approksimaatiosta ja elementin geometriasta. Liitteessä A on selostettu sensitointiparametrin τ arvon määrittystä. Se perustuu elementin muodonmuutosenergian ja sopivan referenssiratkaisun käsitteiden hyväksikäyttöön. Tarkennuksena vielä termin (18) sisältöön todetaan seuraavaa. Lähtökohtana on ollut pienimmän neliön funktionaali

$$\frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix}^T [\boldsymbol{\tau}] \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix} dA. \quad (20)$$

Ensinnäkin siis mukaan on otettu vain tasapainoyhtälöt, ei paineyhtälöä. Lisäksi meidän ei tarvitse suorittaa testifunktion valintaa, sillä eteneminen tapahtuu variaatiolaskennan mukaisesti vaatimalla funktionaalin (20) ensimmäisen variaation häviämistä. Saadaan

tulos, jonka mukaan lausekkeen (18) tulee hävitä. Tarkastelemalla sitten kaavoja (11) ja (12) havaitaan, että testifunktioiksi tulee periaatteessa suureita $G \partial^2 \delta u / \partial x^2$, $G \partial^2 \delta u / \partial y^2$, $\partial \delta p / \partial x$ jne. Nyt kuitenkin tämän artikkelin jatkossa siirtymille ja paineelle käytetään elementtiapproksimaatiossa paikan suhteen vain lineaarisia lausekkeita. Tällöin jäljelle jää lopuksi vain testifunktioiden $\partial \delta \tilde{p} / \partial x$ ja $\partial \delta \tilde{p} / \partial y$ antama osuus, jossa aaltomerkintä viittaa elementtiapproksimaatioon.

Matriisimerkintöjä

Sovelletaan tavanomaiseen tapaan elementtimenetelmään liittyen matriisimerkintöjä seuraten pitkälti viitettä [2]. Ensinnäkin kirjataan sarakematriisit

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{b}\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{t}\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Lisäksi määritellään operaattorimatriisit

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}^V] = [\partial / \partial x \quad \partial / \partial y], \quad (22)$$

jolloin

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{S}]\{\mathbf{u}\}, \quad \varepsilon_v = [\mathbf{S}^V]\{\mathbf{u}\} \quad (23)$$

ja otetaan käyttöön "kimmomatriisi"

$$[\mathbf{D}] = G \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Heikon muodon osuudet (16), (17) ja (18) saavat näiden merkintöjen avulla seuraavan ulkonäön:

$$\delta W^V = - \int_A ([\mathbf{S}]\{\delta \mathbf{u}\})^T [\mathbf{D}][\mathbf{S}]\{\mathbf{u}\} dA - \int_A p [\mathbf{S}^V]\{\delta \mathbf{u}\} dA + \int_A \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{b}\} dA + \int_{s_t} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{t}\} ds, \quad (25)$$

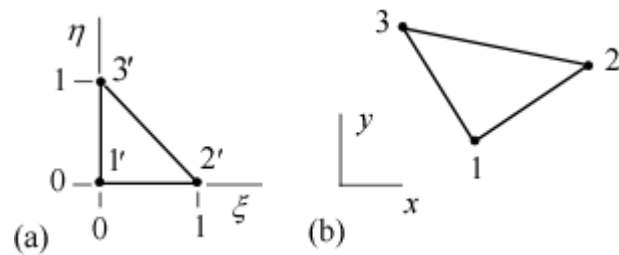
$$\delta W^P = - \int_A \delta p ([\mathbf{S}^V]\{\mathbf{u}\} - \frac{1}{K^P} p) dA, \quad (26)$$

$$\delta W^{LS} = \int_A \tau [\mathbf{S}^V] \delta p ([\mathbf{S}^V]^T p + \{\mathbf{b}\}) dA. \quad (27)$$

Nyt mukana on siis jo siirtymä matriisivastineensa $\{\mathbf{u}\}$ kautta ja on oletettu, että pienimmän neliösumman termin sisältämät toiset derivaatat häviävät ja että sensitointimatriisi on yhtälön (19) tyyppiä.

Kolmisolmuinen kolmioelementti

Edellisissä luvuissa selostettua teoriaa sovelletaan kolmisolmuisen kolmioelementin tapauksessa. Kuvassa 1 on esitetty joitakin merkintöjä yleiselle elementille ja sen referenssivastineelle (engl. reference element, parent element). Sovelletaan isoparametrista kuvausta; esimerkiksi [2].



Kuva 1. (a) Referenssielementti; (b) Elementti xy -tasossa.

Muotofunktiot (pinta-alakoordinaatit) ovat

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta. \quad (28)$$

Perustuntemattomia approksimoidaan täten muodoissa

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \quad (29)$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3, \quad (30)$$

$$p = N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3. \quad (31)$$

Isoparametrinen esitys antaa samoin elementin alueella

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3, \quad (32)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3. \quad (33)$$

Noudattaen jälleen lähteen [2] merkintöjä muotofunktioiden derivaatoiksi saadaan

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{b_1}{2\Delta}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{c_1}{2\Delta}, \quad \dots \quad (34)$$

jossa

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2, \quad \dots \quad (35)$$

ja jossa pisteet tarkoittavat, että lisäkaavoja syntyy indeksien 1, 2, 3 syklisellä permutaatiolla. Merkintää Δ käytetään kolmion pinta-alalle:

$$2\Delta = b_1c_2 - b_2c_1 = \dots \quad (36)$$

Tarvitaan myös elementin alueen A^e yli otettuja integraaleja. Nämä voidaan määrittää suorittamalla integrointi lopuksi referenssielementin alueen yli:

$$\int_{A^e} f(x, y) dA = 2\Delta \int_0^1 \left[\int_0^{1-\xi} f(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi. \quad (37)$$

Tässä käytetään lausekkeita (32) ja (33) antamaan x and y suureissa ξ ja η .

Kolmioelementeistä muodostuvan elementtiverkon solmumuuttujien listaus tapahtuu järjestyksessä: globaali solmunumero 1, muuttujat u_1, v_1, p_1 , globaali solmunumero 2, muuttujat u_2, v_2, p_2 , jne. Erillisen yleisen elementin käsittelyssä on kuitenkin havainnollisempaa muodostaa solmumuuttujien listaus seuraavasti:

$$\{\mathbf{a}^u\} \equiv [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \quad (38)$$

ja

$$\{\mathbf{a}^p\} \equiv [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T. \quad (39)$$

Tällöin saadaan kaavojen (29)–(31) sijasta matriisiesitykset

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}^u] \{\mathbf{a}^u\}, \quad (40)$$

jossa

$$[\mathbf{N}^u] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

ja

$$p = [\mathbf{N}^p] \{\mathbf{a}^p\}, \quad (42)$$

jossa

$$[\mathbf{N}^p] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]. \quad (43)$$

Vielä todetaan, että

$$[\mathbf{S}] \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{N}^u] \{\mathbf{a}^u\} \equiv [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}^u\} \quad (44)$$

ja

$$[\mathbf{S}^v] \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{S}^v] [\mathbf{N}^u] \{\mathbf{a}^u\} \equiv [\mathbf{B}^v] \{\mathbf{a}^u\}. \quad (45)$$

On siis määritelty kaksi apumatriisia $[\mathbf{B}]$ ja $[\mathbf{B}^v]$.

Kun heikkoja muotoja sovelletaan elementtitasolla, esiintyvät integraalit on luonnollisesti otettava elementin alueen A^e ja sen reunan s^e yli. Elementtiosuuksien lausekkei-

den yksityiskohtaista johtoa ei käydessä tässä läpi. Kun otetaan huomioon, että variaatiot $\{\delta \mathbf{a}^u\}$ ja $\{\delta \mathbf{a}^p\}$ ovat mielivaltaisia, päädytään lopuksi osuuksiin

$$\{\mathbf{F}^u\} \equiv -[\mathbf{K}^{uu}] \{\mathbf{a}^u\} - [\mathbf{K}^{up}] \{\mathbf{a}^p\} + \{\mathbf{f}^u\}, \quad (46)$$

$$\{\mathbf{F}^p\} \equiv -([\mathbf{K}^{pu}] \{\mathbf{a}^u\} - [\mathbf{K}_O^{pp}] \{\mathbf{a}^p\}) + [\mathbf{K}_S^{pp}] \{\mathbf{a}^p\} + \{\mathbf{f}_S^p\}, \quad (47)$$

joissa

$$[\mathbf{K}^{uu}]_{6 \times 6} = \int_{A^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA, \quad (48)$$

$$[\mathbf{K}^{up}]_{6 \times 3} = \int_{A^e} [\mathbf{B}^v]^T [\mathbf{N}^p] dA, \quad (49)$$

$$[\mathbf{K}^{pu}]_{3 \times 6} = \int_{A^e} [\mathbf{N}^p]^T [\mathbf{B}^v] dA, \quad (50)$$

$$[\mathbf{K}_O^{pp}]_{3 \times 3} = \int_{A^e} \frac{1}{K^p} [\mathbf{N}^p]^T [\mathbf{N}^p] dA, \quad (51)$$

$$[\mathbf{K}_S^{pp}]_{3 \times 3} = \int_{A^e} [\mathbf{C}^p]^T [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{C}^p] dA, \quad (52)$$

$$\{\mathbf{f}^u\}_{6 \times 1} = \int_{A^e} [\mathbf{N}^u]^T \{\mathbf{b}\} dA + \int_{s_t^e} [\mathbf{N}^u]^T \{\mathbf{t}\} ds, \quad (53)$$

$$\{\mathbf{f}_S^p\}_{3 \times 1} = \int_{A^e} [\mathbf{C}^p]^T [\boldsymbol{\tau}] \{\mathbf{b}\} dA. \quad (54)$$

Käytännössä suuret G ja ν otaksutaan elementeittäin vakioksi (jolleivät jo ole sitä) ja ne voidaan siirtää integraalimerkkien ulkopuolelle.

Sovelluksia

Numeeristen sovellusten yhteydessä on lähinnä kiinnostavaa verrata tämän artikkelin kuvaamalla formulaatiolla (myöhemmin u, v, p -formulaatio) saatuja tuloksia puhtaalla siirtymäformulaatiolla (myöhemmin u, v -formulaatio) saatuihin tuloksiin (kun $\nu \neq 1/2$). Käsitellyt sovellukset ovat hyvin pelkistettyjä, mutta niiden avulla saadaan kuitenkin kohtuullinen kuva kyseisten versioiden toiminnasta. Tässä siis u, v -formulaatiossa sovelletaan kolmisolmuisia kolmioelementtejä, joiden solmuparametreina ovat vain siirtymäkomponentit.

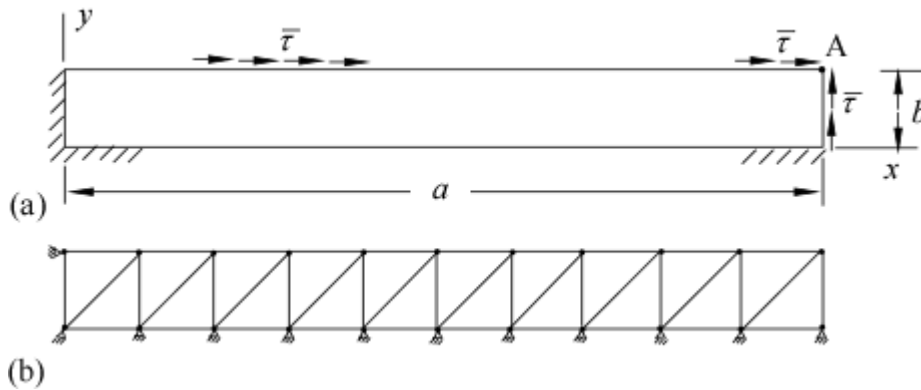
Leikkaussovellus

Kuvan 2 (a) esittämä suorakaiteen muotoinen kappale on kiinnitetty jäykästi ($u = 0$, $v = 0$) reunoilla $x = 0$ ja $y = 0$. Reunoilla $x = a$ ja $y = b$ vaikuttaa reunan suuntainen vakioarvoinen traktiokomponentti $\bar{\tau}$. Mitta $a = 10b$. Kyseessä on siis äärimmäisen yk-

sinkertainen esimerkkitapaus, jonka tarkka ratkaisu ei ole kuitenkaan tiettävästi tunnettu. Mutta intuitiivisesti ja Saint Venantin periaatteeseen tukeutuen on ilmeistä, että pisteen A läheisyydessä jännitystila on jo hyvin suurella tarkkuudella tyyppiä $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \bar{\tau}$. Täten myös keskipaine $p = 0$. Pisteen A siirtymäkomponentit ja paine ovat siis

$$\bar{u}_A = \frac{\bar{\tau} b}{G}, \quad \bar{v}_A = 0, \quad \bar{p}_A = 0. \quad (55)$$

Pidämme näitä arvoja eksakteina vertailussa kuvassa 2 (b) esitetyn yksinkertaisen elementtiverkon antamiin tuloksiin. Diskreetit kinemaattiset reunaehdot on esitetty kuvassa (b) symbolisesti.



Kuva 2. (a) Kappale; (b) Elementtiverkko.

Saatuja laskentatuloksia on taltioitu taulukkoon 1. (Tuloksia on esitetty standardin vastaisesti käyttäen desimaalipilkun sijasta desimaalipistettä noudattaen Mathematica-ohjelmiston tuottamia muotoja.)

Taulukko 1. Poissonin vakion ν vaikutus ratkaisuun pisteessä A, kun sensitoointiparametrille on annettu arvo $\tau = \Delta / (6G)$, jossa Δ on elementin pinta-ala.

		ν	0.5	0.499	0.45	0.3
u, v, p - form.	u_A / \bar{u}_A		0.997673	0.997695	0.998503	0.999540
	v_A / \bar{u}_A		0.000221	0.000221	0.000209	0.000126
	$p_A / \bar{\tau}$		0.001408	0.001395	0.000917	0.000300
u, v - form.	u_A / \bar{u}_A		-----	0.274889	0.982983	0.998571
	v_A / \bar{u}_A		-----	0.001447	0.001539	0.000427

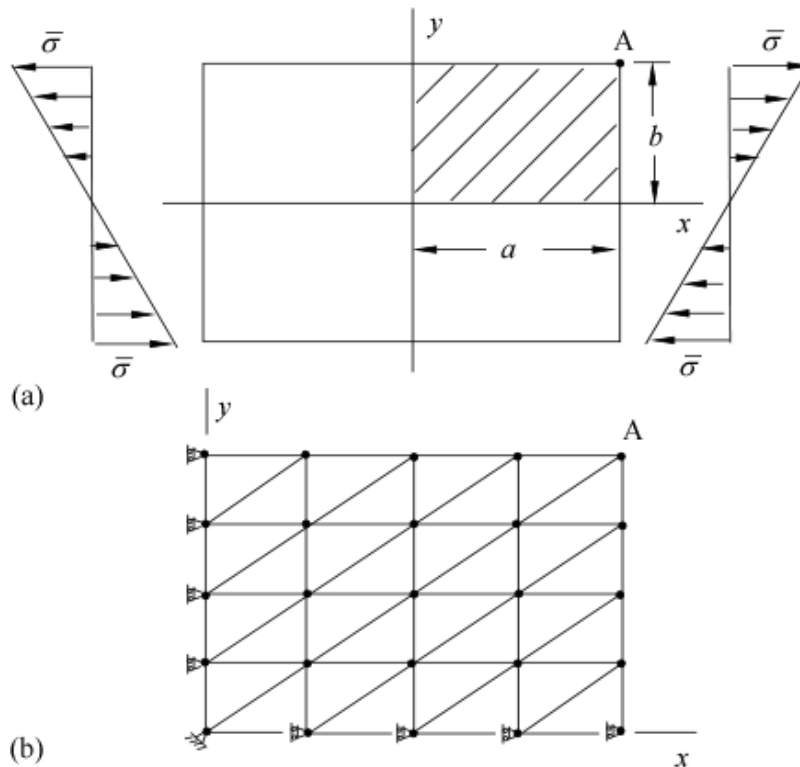
Arvolla $\nu = 0.499$ u, v -formulaation antamassa ratkaisussa näkyy odotetusti voimakkaasti lukkiutuminen (engl. locking). Sama ilmiö on esillä vielä jonkin verran, kun $\nu = 0.45$. Yleisesti ottaen "tavanomaisilla" ν :n arvoilla u, v, p -formulaation (siirtymien) tulokset ovat hieman tarkempia kuin u, v -formulaatiolla saadut, mutta toisaalta tuntemat-

tomiakin on enemmän. Todettakoon myös (ei esitetty taulukossa), että kun $\nu < 0.3$ (liikimain), u, v, p -formulaatio toimii hyvin vaikka $\tau = 0$, toisin sanoen pelkkä Galerkin-versio toimii.

Sekaformulaatiolla tässä esimerkissä mielenkiintoinen periaatteellinen ero puhtaan siirtymäformulaatioon verrattaessa. Pisteessä A on nimittäin seuraavat traktioreunaehdot. Reuna $x = a$: $t_x = 0$, $t_y = \bar{\tau}$. Reuna $y = b$: $t_x = \bar{\tau}$, $t_y = 0$. Näistä seuraa täsmälleen pisteessä A eksaktit tulokset $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \bar{\tau}$. Käyttäen sitten hyväksi määritelmää (3) nähdään siis, että myös keskipaine $p = 0$. Mutta koska keskipaine esiintyy pisteen A solmussa solmuparametrina, tämä tieto voidaan ottaa huomioon suoraan reunaehtona diskreetissä ratkaisussa. Kuitenkin tässä suoritettujen laskelmien osoittivat, että vaikutus saatuihin solmuisiirteisiin on vähäinen, mikä on ymmärrettävää, koska ilman tätä reunaehtoa saadut keskipaineen diskreetit arvot pisteessä A ovat jo hyvin lähellä nollaa.

Taivutussovellus

Tämä sovellus on lainattu vanhasta elementtimenetelmäteoksesta [4]; kuva 3 (a).



Kuva 3. (a) Kappale; (b) Elementtiverkko.

Tarkasteltava kappale on jälleen suorakaide. Lähteessä [4] sovellus koskee tasojännitystilaa ja käytetään nelisolmuisia suorakaide-elementtejä. Nyt siis otaksutaan tasomuodonmuutostila. Taivutusjännityksen maksimiarvo on $\bar{\sigma}$. Reunaehdot muodostuvat il-

meisellä tavalla pelkästään traktioista. Jäykän kappaleen liike on estetty kiinnittämällä liike ja rotaatio nolliksi origossa.

Tarkka ratkaisu on jännityksille ja keskipaineelle

$$\sigma_x = \frac{y}{b} \bar{\sigma}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad p = \frac{1}{2} \frac{y}{b} \bar{\sigma} \quad (56)$$

ja siirtymille

$$u = \frac{\bar{\sigma}}{Eb} (1-\nu^2) xy, \quad v = -\frac{\bar{\sigma}}{2Eb} (1-\nu^2) \left(x^2 + \frac{\nu}{1-\nu} y^2\right) \quad (57)$$

sekä erityisesti pisteessä A

$$\bar{u}_A = \frac{\bar{\sigma}}{E} (1-\nu^2) a, \quad \bar{v}_A = -\frac{\bar{\sigma}}{E} (1-\nu^2) \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{\nu}{1-\nu} b\right), \quad \bar{p}_A = \frac{1}{2} \bar{\sigma}. \quad (58)$$

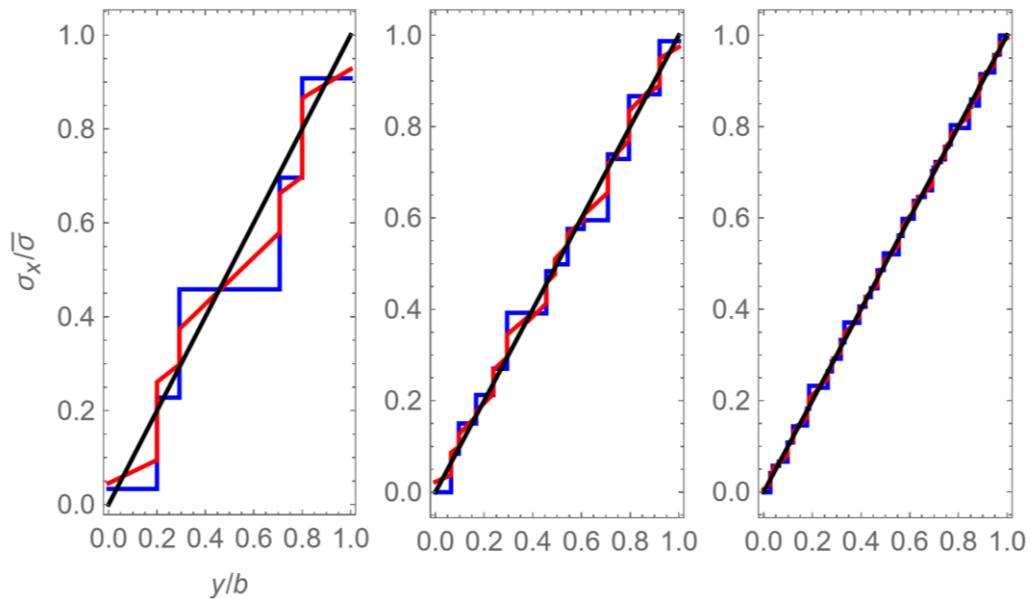
Symmetrian johdosta tarkastelu voidaan rajoittaa kappaleen neljännekseen (kuvassa viivoitettu alue). Mitta $a = 3/2 \cdot b$. Käytetty verkko symbolisine kinemaattisine reunaehdoineen on esitetty kuvassa 3 (b). Tuloksia on annettu samaan tapaan kuin edellisessä sovelluksessa pisteeseen A liittyen. Kolmioelementit eivät tunnetusti ole erityisen tehokkaita taivutustilanteessa, joten verkkoa on pidettävä tehtävän kannalta melko harvaina. Vertailu kahden esitetyn formulaation välillä onnistuu kuitenkin näinkin.

Taulukko 2. Poissonin vakion ν vaikutus ratkaisuun pisteessä A, kun sensitointiparametrille on annettu arvo $\tau = \Delta / (6G)$, jossa Δ on elementin pinta-ala.

		ν	0.5	0.499	0.45	0.3
u, v, p - form.	u_A / \bar{u}_A		0.968276	0.968163	0.962806	0.948084
	v_A / \bar{v}_A		0.974301	0.974172	0.967929	0.949831
	p_A / \bar{p}_A		0.920074	0.919999	0.916371	0.905720
u, v - form.	u_A / \bar{u}_A		-----	0.733418	0.870367	0.906505
	v_A / \bar{v}_A		-----	0.776405	0.914737	0.922214

Jälleen u, v, p -formulaation antamia siirtymiä voidaan pitää tarkempina kuin u, v -formulaatiolla saatuja. Myös kuten edellisessä sovelluksessa traktioreunaehdoista pisteessä A voidaan johtaa täsmälliset tiedot $\sigma_x = \bar{\sigma}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ ja erityisesti $p = 0.5 \bar{\sigma}$. Tämän diskreetin reunaehdon käytön antamia muuttuneita tuloksia ei ole esitetty, koska vaikutuksen on havaittu olevan samaan tapaan kuin edellisessä sovelluksessa kuitenkin melko vähäistä siirtymien suhteen.

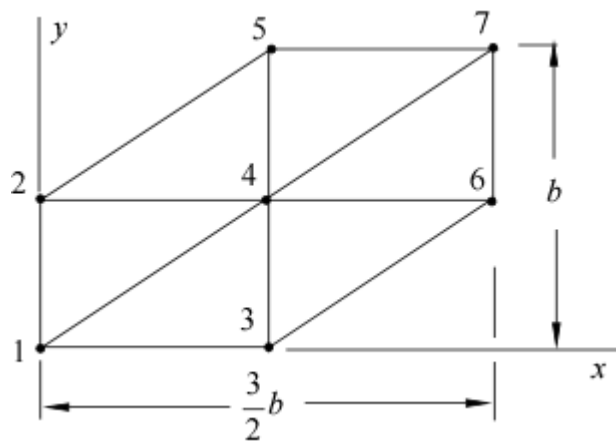
Kuvassa 4 verrataan dimensiottoman jännityksen $\sigma_x / \bar{\sigma}$ tarkkaa ratkaisua (musta) u, v, p -formulaation (punainen) ja u, v -formulaation (sininen) tuottamiin ratkaisuihin, kun $\nu = 0.3$. Numeeriset menetelmät perustuvat noin 10, 100 ja 1000 (vasemmalta oikealle) elementin epäsäännöllisiin kolmioverkkoihin. Jälleen voidaan todeta, että u, v, p -formulaation paloittain lineaarinen jännitysratkaisu on ainakin silmämääräisesti lähempänä tarkkaa ratkaisua kuin u, v -formulaation paloittain vakio jännitysratkaisu.



Kuva 4. Dimensioniton Jännityskomponentti $\sigma_x / \bar{\sigma}$ poikkileikkauksessa $x/a = 0.3$.

Tilkkutesti

Tarkastellaan kuvan 5 esittämää yksinkertaista elementtiverkkoa. Kyseessä on niin sanotun tilkkutestin (engl. patch test) soveltaminen; esimerkiksi [2].



Kuva 5. Elementtiverkko.

Otaksutaan lineaarinen siirtymäkenttä

$$u = \alpha + \beta x + \gamma y, \quad v = \delta + \varepsilon x + \zeta y, \quad (59)$$

jossa α , β ja niin edelleen ovat mielivaltaisia vakioita. Nyt siis analyyttinen käsittely antaa

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \beta + \zeta \quad (60)$$

ja keskipaine saa vakioarvon

$$p = \frac{G}{1-2\nu}(\beta + \zeta). \quad (61)$$

Annetaan tilkun reunasolmuille 1, 2, 3, 5, 6, 7 lausekkeista (59) lasketut siirtymät ja määritetään elementtiohjelman solmupisteessä 4 antamat arvot, joiksi tulee saada $u_4 = \alpha + 3b\beta/4 + b\gamma/2$ ja $v_4 = \delta + 3b\varepsilon/4 + b\zeta/2$. Lisäksi keskipaineelle tulee saada vakioarvo (61) kaikissa solmuissa. Täsmälleen tapaus $\nu = 0.5$ vaatii erikoiskäsittelyä. Tehdään sijoitus $\zeta = -\beta$, koska muuten kokoonpuristumattomuusehto ei toteudu. Tällöin keskipaine jää kaavan (61) mukaisesti epämääräiseen muotoon $0/0$. Tällöin on vielä annettava keskipaineelle jokin arvo jossain solmussa ja muissa solmuissa tulee sitten saada sama vakioarvo.

Osoittautuu, että sekaformulaatioversio läpäisee tilkkutestin. Edelleen osoittautuu, että poislukien tapaus $\nu = 1/2$ myös puhdas Galerkin-versio ilman pienimmän neliön keinon mukaanottoa läpäisee testin eli tilkkutestin filosofian mukaisesti kyseessä on suppeneva ratkaisumenetelmä. On kuitenkin ilmeistä, että lähellä arvoa $\nu = 1/2$ lukkiutumislähteen johdosta kohtuullisen tarkkuuden saavuttaminen voisi vaatia tällöin kohtuuttoman tiheän verkon käyttöä.

Käsitellyn kolmisolmuisen sekaformulaatioon perustuvan kolmioelementin todellisen "kilpailukyvyyn" selvitys etenkin jännitysten määrittämisen suhteen vaatisi perusteellisia numeerisia analyysejä, joihin ei tässä esittelytyyppisessä artikkelissa katsota olevan tarvetta.

Yleistyksiä

Sekaformulaatio perustuu jännityksen jakoon isotrooppiseen osaan ja deviatoriseen osaan, josta seuraa mm. käsiteltyyn tapaukseen liittyvä keskipaineen määritelmä (3). Artikkelissa sovellettuja askeleita voitaneen soveltaa myös anisotrooppisen materiaali-mallin yhteydessä, kolmessa dimensiossa ja kolmioelementtejä yleisemmille elementeille. Sensitoinnissa käsitelyyn tulee mahdollisia eri versioita sen mukaan, tuleeko termisissä (18) mukaan myös siirtymistä syntyviä termejä.

Stokesin problemaa on käsitelty muun muassa lähteessä [5] tavalla, jota voitaisiin nimittää vaikka paineprojektioformulaatioksi. Stokesin problemaa "stabiloidaan" karkeasti kuvaten muuntamalla alkuperäistä paineen approksimaatiota keinotekoisesti osittain alempiasteiseksi käyttäen sakkoformulaatiota (engl. penalty method). Emme käy aihetta tässä perusteellisesti läpi vaan viittaamme lähteeseen [5].

Menettelyä voidaan kuitenkin soveltaa myös kokoonpuristumattoman ja yleisemmin kokoonpuristuvan kiinteän aineen probleeman yhteydessä. Käsitely on tässä kolmisolmuisen elementin tapauksessa seuraava. Otetaan kussakin elementissä käyttöön neliöllinen sakkotermi

$$\frac{1}{2} \int_{A^e} \alpha^e (p - p_m)^2 dA, \quad (62)$$

jossa p_m on keskipaineen keskiarvo ja $\alpha^e > 0$ skalaarinen painotekijä, ja korvataan pienimmän neliösumman termi (18) lausekkeen (62) variaatiolla

$$\delta W^\alpha = \int_{A^e} \alpha^e (\delta p - \delta p_m)(p - p_m) dA. \quad (63)$$

Kertoimen α^e arvo voidaan määrittää elementeittäin samanlaisella logiikalla kuin mitä esitettiin sensitointiparametrin yhteydessä. Esimerkiksi liitteen A kuvan A.1 (b) tapauksessa saadaan $\alpha = 5 / (2G)$. Lähteessä [5] käytetään kaikkialla arvoa $\alpha = 1$ Stokesin probleemalle, joka vastaa siis tässä arvoa $\nu = 1 / 2$. Suoritetut sovelluslaskelmat osoittavat, että kyseinen sakkoformulaatioversio toimii suunnilleen samaan tapaan kuin Galerkin-pienimmän neliön keinon versio lineaarisen kolmioelementin tapauksessa.

Viitteet

- [1] T. J. R. Hughes, L. P. Franca and G. M. Hulbert, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 73, 173–189, 1989. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90111-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90111-4)
- [2] O. C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method, Volume I, The Basis*, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [3] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969.
- [4] C. S. Desai, J. F. Abel, *Introduction to the Finite Element Method, A Numerical Method for Engineering Analysis*, Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [5] Dohrmann, CR, Bochev, A stabilized finite element method for the Stokes problem based on polynomial pressure projections, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004; **46**: 183–201. <https://doi.org/10.1002/flid.752>
- [6] J. Freund and E-M. Salonen, Sensitized principle of virtual work and the single-element strain energy test, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 49, No. 1, 2016, pp. 1–13. http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2016/nro1/RakMek_49_1_2016_1.pdf
- [7] E-M. Salonen and J. Freund, On the weight factors in the least squares finite element method, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 33, No 3, 2000, pp. 3–16. http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2000/nro1/RakMek_33_1_2000_1.pdf

Jouni Freund
Aalto-yliopisto, Insinööritieteiden korkeakoulu
PL 12100, 00076 Aalto, Finland
jouni.freund@aalto.fi

Eero-Matti Salonen
Sibeliuksenkatu 3 B 25, 00250 Helsinki, Finland
eeromatti.salonen@gmail.com

Liite A; sensitoointiparametri

Sensitoointiparametri τ :n arvo määritetään lähteessä [6] selostetun muodonmuutosenergiatestin avulla. Nyt kuitenkin myös keskipaine esiintyy syntyvissä kaavoissa ja käsittelytapaa täytyy muuttaa jonkin verran. Testissä käytetään sopivasti valittua yhtälöiden, ja (8), (11) ja (12) tarkkaa ratkaisua ja vaaditaan, että referenssiratkaisun elementti-interpolantti yhdessä pienimmän neliösumman termin kanssa tuottaa referenssiratkaisua vastaavan muodonmuutosenergian.

Tarkastellaan tiettyä kolmioelementtiä tilanteessa, jossa koordinaatiston origo on sijoitettu elementin pintakeskiöön. Sovellettu ratkaisu on

$$u = \frac{A}{4G}(x^2 + y^2), \quad v = \frac{A}{4G}(x^2 + y^2), \quad p = -A(x + y), \quad (\text{A.1})$$

jossa vakion A arvolla ei ole vaikutusta lopputulokseen. Lausekkeet on saatu lähteessä [7] selostettuun tapaan kehittämällä suureet u , v , ja p kaksiulotteisiksi Taylorin sarjoiksi paikallisen origon suhteen ja soveltamalla vallitsevia differentiaaliyhtälöitä, (8), (11) ja (12) origossa. Saatu referenssiratkaisu (A.1) toteuttaa kyseiset yhtälöt, kun $b_x = 0$, $b_y = 0$.

Muodonmuutosenergiatiheyden lauseke on

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon,p} &= \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \\ &= \frac{1}{2}[G(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + G\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{K^p} p^2] \\ &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \frac{1}{2} \frac{1}{K^p} p^T p. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Kehitetyt muodot seuraavat artikkelin aikaisempien kaavojen (4) ja (6) avulla. Tässä paineeseen liittyvä neliöllinen termi on kirjoitettu sitä edeltävää termiä muistuttavaan muotoon (skalaarin transpoosi $p^T = p$), jolloin siirtyminen jatkossa matriisiesitykseen käy juohevasti. Elementin (analyttinen) muodonmuutosenergia syntyy integroimalla (A.1) elementin alueen yli:

$$U_A = \frac{1}{2} \int_{A^e} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} dA + \frac{1}{2} \int_{A^e} \frac{1}{K^p} p^T p dA. \quad (\text{A.3})$$

Tässä vielä lopuksi suureet $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ ja p esitetään referenssiratkaisun avulla. Saatua tulosta verrataan referenssiratkaisun (A.1) elementti-interpolantin tuottaman muodonmuutosenergian ja pienimmän neliösumman termin summaan.

Kun sovelletaan elementtiapproksimaatiota, lauseke (A.3) muuntuu yhteyksien

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \approx \{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{a}^u\}, \quad p \approx \tilde{p} = [\mathbf{N}^p]\{\mathbf{a}^p\} \quad (\text{A.4})$$

johdosta muotoon

$$U_N = \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^u\}^T \int_{A^e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dA \{\mathbf{a}^u\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^p\}^T \int_{A^e} \frac{1}{K^p} [\mathbf{N}^p]^T [\mathbf{N}^p] dA \{\mathbf{a}^p\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^p\}^T \int_{A^e} [\mathbf{C}^p]^T [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{C}^p] dA \{\mathbf{a}^p\}. \quad (\text{A.5})$$

Kun verrataan kaavoihin (48), (51) ja (52), saadaan esitys (ν otaksutaan vakioksi elementin alueella)

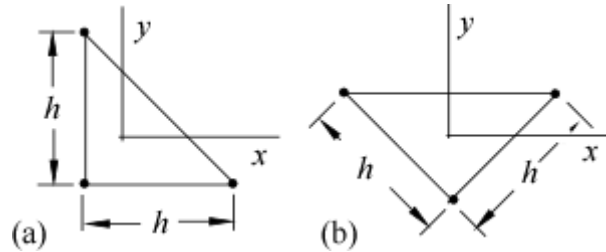
$$U_N = \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^u\}^T [\mathbf{K}^{uu}] \{\mathbf{a}^u\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{a}^p\}^T ([\mathbf{K}_O^{pp}] + [\mathbf{K}_S^{pp}]) \{\mathbf{a}^p\}. \quad (\text{A.6})$$

Solmuarvot $\{\mathbf{a}^u\}$ ja $\{\mathbf{a}^p\}$ saadaan referenssiratkaisusta ja parametri τ määritetään loppuksi yhtälöstä (muistetaan, että $[\mathbf{K}_S^{pp}]$ sisältää kyseisen parametrin)

$$U_A = U_N. \quad (\text{A.7})$$

Mainittakoon että lineaarisen approksimaation tapauksessa paineen elementti-interpolantti yhtyy referenssiratkaisuun, joten muodonmuutosenergian painetermit ovat samoja yhtälön (A.7) molemmilla puolilla eivätkä siten vaikuta tilanteeseen.

Sensitointiparametrin arvo riippuu valitusta referenssiratkaisusta ja elementin geometriasta. Elementin suuntauneisuus koordinaatiston suhteen ei vaikuta parametrin arvoon (Kuva A.1). Ideana on tarkastella muutamaa edustavaa tapaus ja tehdä valinta tulosten perusteella.



Kuva A.1 (a) Suorakulmainen tasakylkinen kolmioelementti, (b) Sama elementti päähitauksoordinaatistossa.

Kuvan A.1 geometrialle saadaan

$$\tau = \frac{5}{36} \frac{\Delta}{G} \approx \frac{1}{6} \frac{\Delta}{G}, \quad (\text{A.8})$$

jossa Δ on elementin pinta-ala. Sensitointiparametrin arvo on tässä artikkelissa sovelletussa Galerkin-pienimmän neliön versiossa verrannollinen elementin karakteristisen pituusmitan neliöön ja siis pienenee verkon tihentyessä.

Liite B; ratkaisun stabiilius?

Tarkastellaan lopuksi heikon muodon lausekkeen termien $\delta W \equiv \delta W^V + \delta W^P + \delta W^{LS}$ vaikutusta numeerisen menetelmän stabiiliuteen eli ratkaisun yksikäsitteisyyteen esimerkin avulla. Oletetaan paloittain lineaarinen approksimaatio, jolloin toiset derivaatat häviävät pienimmän neliösumman termissä. Valitaan lisäksi $b_x = b_y = t_x = t_y = 0$ ja

$$[\boldsymbol{\tau}] = \tau \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Valinta $\delta u = -u$, $\delta v = -v$, $\delta p = p$ johtaa ei-negatiiviseen lausekkeeseen

$$\delta W = \int_A G((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2) dA + \int_A \frac{1}{K^P} p^2 dA + \int_A \tau \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right) dA, \quad (\text{B.2})$$

mikäli sensitointiparametri $\tau \geq 0$. Lukuunottamatta täysin kokoonpuristumatonta tapusta $K^P \rightarrow \infty$ lauseke määrittää normin siirtymän ja paineen elementtiapproksimaatioiden joukossa, kun jäykän kappaleen liike on estetty. Kokoonpuristumattomassa tapauksessa lausekkeen (B.2) toinen termi häviää ja paineratkaisu määräytyy vakiota vaille. Tällöin paineen approksimaatiota pitää rajoittaa lisäehdolla, kuten paineen arvolla jossain pisteessä tai paineen keskiarvolla ratkaisualueessa.

Mainittakoon vielä, että lausekkeen (B.2) ensimmäisen ja toisen termin kertoimien suhde $1/G^2$ johtaa huonoon paineratkaisuun tavanomaisilla liukukertoimen arvoilla ja laskentatarkkuuksilla. Numeerinen suuruusluokkaongelma hyvin suuren (tai hyvin pienen) G :n kanssa voidaan kiertää esimerkiksi käyttämällä heikossa muodossa dimensiotonta painetta $q = p/G$ (siis kirjoittamalla $p = Gq$) tai siirtymällä "oikeaoppiseen" dimensiottomaan esitykseen (kun käytössä on siis myös dimensioton G).