
This is an electronic reprint of the original article.
This reprint may differ from the original in pagination and typographic detail.

Aalto, Jukka

Tekninen selvitys : Tarkkoja elementtejä helposti

Published in:
Rakenteiden mekaniikka

DOI:
[10.23998/rm.141526](https://doi.org/10.23998/rm.141526)

Julkaistu: 01/01/2023

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Published under the following license:
CC BY

Please cite the original version:
Aalto, J. (2023). Tekninen selvitys : Tarkkoja elementtejä helposti. *Rakenteiden mekaniikka*, 56(4), 199-204.
<https://doi.org/10.23998/rm.141526>

This material is protected by copyright and other intellectual property rights, and duplication or sale of all or part of any of the repository collections is not permitted, except that material may be duplicated by you for your research use or educational purposes in electronic or print form. You must obtain permission for any other use. Electronic or print copies may not be offered, whether for sale or otherwise to anyone who is not an authorised user.

Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)

vol. 56, nro 4, 2023, s. 199–204

<http://rakenteidenmekaniikka.journal.fi>

<https://doi.org/10.23998/rm.141526>

© 2023 kirjoittajat

Vapaasti saatavilla CC BY-SA 4.0 -lisenssin mukaisesti

Tekninen selvitys: Tarkkoja elementtejä helposti

Avainsanat: palkki, analyttinen ratkaisu, palkkielementti, Timoshenko-palkki

Julkaistu verkossa: 8.1.2023.

TkT Djebbar Baroudin ja TkL Jari Laukkasen muistolle

Johdanto

Elementtimenetelmään perustuvien valmisohjelmien käyttö rakenteiden mekaniikan tehtävien ratkaisemisessa on nykyään itsestään selvyys. Alan opetuksessa on kuitenkin välttämätöntä käsitellä klassisen rakenteiden mekaniikan periaatteita, menetelmiä ja yhtälöitä, jotta opiskelijan tuntuma rakenteiden käyttäytymiseen voisi syntyä ja kehittyä. Siksi eräiden perustehtävien differentiaaliyhtälöitä ja niiden ratkaisemista analyttisesti on tärkeä opettaa. Myös rakenteiden mekaniikan ja rakennetekniikan kokeellisessa tutkimuksessa rakenteen analyttiset ratkaisut ovat hyödyllisiä.

Jotta palkkitehtäville voitaisiin määrittää analyttinen, tarkka ratkaisu monimutkaisemmissa tuki- ja kuormitustapauksissa, on kehitetty niin sanottuja tarkkoja palkkielementtejä. Ne antavat kunkin elementin alueella tehtävän analyttisen ratkaisun, joten niitä tarvitaan tavanomaisia palkkielementtejä vähemmän. Niitä käytettäessä ei myöskään tarvitse huolehtia elementtiverkon tiheydestä riittävän tarkkuuden saamiseksi.

Tällaisia tarkkoja elementtejä on varmasti kehitetty kaikentyypisille palkkitehtäville. Tietokoneohjelmia, jotka käyttävät tällaisia elementtejä voi kuitenkin olla vaikea saada käsiinsä.

Yksi ratkaisu syntyneessä tilanteessa voisi olla laatia tehtävään tarvittava elementtiohjelma itse. Tässä esitellään vaihe vaiheelta ne yhtälöt, joita elementin jäykkyysmatriisiin ja kuormitusvektorin ohjelmoimiseen tarvitaan. Lisäksi kuvataan, kuinka siirtymä- ja voimasuureiden tarkat jakautumat elementin alueella voidaan laskea. Tavoitteena on minimoida ohjelmoimisen työmäärä ja virhemahdollisuudet.

Johdamisen vaiheet

Useissa yksinkertaisissa tapauksissa rakenteiden mekaniikan palkkitehtävä voidaan muokata sellaiseksi, että saadaan yksi tavallinen lineaarinen differentiaaliyhtälö yhden perus-

tuntemattoman ratkaisemiseksi ja tehtävän muut fysikaalisesti tärkeät suureet voidaan lausua tämän perustuntemattoman avulla.

Yhtälön yleinen ratkaisu muodostuu sen homogeeniosan yleisestä ratkaisusta ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisusta. Homogeeniosan yleinen ratkaisu on lineaarisesti riippumattomien yksityisratkaisujen ja tuntemattomien integrointivakioiden tulojen summa. Jos differentiaaliyhtälön kertaluku on n , on sen yleinen ratkaisu muotoa

$$v(x) = \sum_{i=1}^n C_i v_i(x) + \bar{v}(x), \quad (1)$$

missä C_i ovat integrointivakiot, $v_i(x)$ ovat homogeeniyhtälön yksityisratkaisut ja $\bar{v}(x)$ on täydellisen yhtälön yksityisratkaisu ja n on integrointivakioiden lukumäärä. Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu $\bar{v}(x)$ aiheutuu tavallisesti ulkoisesta kuormituksesta tai muista tekijöistä, jotka synnyttävät rakenteeseen rasituksia.

Kun tehtävän ratkaisemiseksi konstruoidaan tarkka elementti soveltamalla ratkaisua (1), on siinä n vapausastetta, joista puolet elementin kummassakin päässä. Elementin vapausastesiirtymät valitaan siten, että niiden avulla voidaan muodostaa elementtien väliset yhteensopivuusehdot. Elementin vapausastevoimat ovat näitä vastaavat voimasuureet.

Esitetään tarvittavien siirtymä- ja voimasuureiden lausekkeet perustuntemattoman $v(x)$ avulla lausuttuina. Sijoittamalla näihin lausekke (1), saadaan ne lausutuiksi lineaarisina lausekkeina integrointivakioista. Muodostetaan elementin vapausastesiirtymien ja vastaavien siirtymäsuureiden väliset yhteensopivuusehdot elementin päissä $x=0$ ja $x=l$. Niiden avulla elementin vapausastesiirtymät saadaan lausutuksi integrointivakioiden avulla muodossa

$$\mathbf{a}^e = \mathcal{A}\mathbf{C} + \bar{\mathbf{a}}, \quad (2)$$

missä \mathbf{a}^e vapausastesiirtymien muodostama $n \times 1$ pystyvektori, \mathcal{A} on $n \times n$ matriisi, \mathbf{C} on integrointivakioiden muodostama $n \times 1$ pystyvektori ja $\bar{\mathbf{a}}$ on $n \times 1$ pystyvektori. Muodostetaan elementin vapausastevoimien ja vastaavien voimasuureiden väliset tasapainoyhtälöt elementin päissä $x=0$ ja $x=l$. Niiden avulla elementin vapausastevoimat saadaan lausutuksi integrointivakioiden avulla muodossa

$$\mathbf{F}^e = \mathcal{B}\mathbf{C} + \bar{\mathcal{F}}, \quad (3)$$

missä \mathcal{B} on $n \times n$ matriisi ja $\bar{\mathcal{F}}$ on $n \times 1$ pystyvektori.

Yhtälöstä (2) seuraa

$$\mathbf{C} = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{a}^e - \bar{\mathbf{a}}) \quad (4)$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöön (3) saadaan elementin vapausastevoimien ja vapausastesiirtymien välille yhteys

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{R}^e, \quad (5)$$

missä

$$\mathbf{K}^e = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}, \quad \mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathcal{F}}. \quad (6)$$

\mathbf{K}^e on elementin jäykkyysmatriisi ja \mathbf{R}^e elementin kuormitusvektori. Matriisit \mathbf{K}^e ja \mathbf{R}^e on varustettu yläindekseillä e muistuttamaan, että ne ovat elementtikohtaisia. Myös matriisit \mathcal{A} , \mathcal{B} , $\bar{\mathcal{F}}$ ja $\bar{\mathbf{a}}$ ovat luonnollisesti myös elementtikohtaisia, mutta niihin ei yläin-

deksiä e merkintöjen selkeyden vuoksi ole lisätty. Elementin jäykkyyssmatriisiin \mathbf{K}^e ja kuormitusvektorin \mathbf{R}^e muodostaminen tapahtuu siis muodostamalla ensin matriisit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \bar{\mathbf{a}}$ ja $\bar{\mathcal{F}}$ sekä käyttämällä sitten kaavoja (6).

Kun tehtävän systeemi yhtälöryhmä

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{R} \quad (7)$$

on ratkaistu ja systeemivapausasteet \mathbf{a} tunnetaan, saadaan kunkin elementin vapausasteesiirtymät \mathbf{a}^e selville. Elementtiin liittyvät integrointivakiot \mathbf{C} voidaan sitten laskea kaavalla (4). Kun ne tunnetaan, voidaan elementin sisäisten voima- ja siirtymäsuureiden jakaumat elementin alueella määrittää käyttäen niiden integrointivakioiden avulla lausuttuja lausekkeita.

Monimutkaisemmissa tapauksissa rakenteiden mekaniikan palkkitehtävä voidaan muokata sellaiseksi, että saadaan kahden (tai useamman) tavallisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ryhmä kahden (tai useamman) perustuntemattoman ratkaisemiseksi ja tehtävän muut fysikaalisesti tärkeät suureet voidaan lausua näiden perustuntemattomien avulla. Myös tällaisessa tapauksessa voidaan pääpiirtein yllä kuvatulla tavalla johtaa tarkka elementti tehtävän ratkaisemiseksi.

Yksinkertainen malliprobleema: Timoshenko-palkkielementti

Timoshenko-palkin leikkausvoimalle $Q(x)$ ja taivutusmomentille $M(x)$ ovat voimassa palkin differentiaaliset tasapainoyhtälöt

$$Q' + q = 0, \quad Q = M', \quad (8)$$

missä $q(x)$ on jakautunut poikittainen kuormitus. Palkin kiertymän $\theta(x)$, taipuman $v(x)$ ja keskimääräisen liukuman $\gamma(x)$ yhteys on

$$\theta = v' - \gamma. \quad (9)$$

Taivutusmomentin ja kiertymän yhteys on

$$M = -EI\theta', \quad (10)$$

missä E ja I ovat kimmomoduuli ja poikkileikkauksen jäyhyysmomentti, sekä leikkausvoiman ja keskimääräisen liukuman yhteys on

$$Q = kGA\gamma, \quad (11)$$

missä G , A ja k ovat liukumoduuli, poikkileikkauksen pinta-ala ja leikkauskorjauskertoimet. Leikkausvoimalle saadaan käyttäen yhtälöitä (8)–(11)

$$Q = M' = -EI\theta'' = -EI(v'' - \gamma'') = -EI\left(v'' - \frac{Q'}{kGA}\right) = -EI\left(v'' + \frac{q'}{kGA}\right). \quad (12)$$

ja kiertymälle käyttäen yhtälöitä (9), (11) ja (12)

$$\theta = v' - \gamma = v' - \frac{Q}{kGA} = v' + \frac{EI}{kGA}v'' + \frac{EI}{(kGA)^2}q'. \quad (13)$$

Sijoittamalla leikkausvoima (12) tasapainoyhtälöön (8a) saadaan

$$v^{(4)} = \frac{q}{EI} - \frac{q''}{kGA}. \quad (14)$$

Tämä on Timoshenko-palkin taipuman differentiaaliyhtälö.

Differentiaaliyhtälön (14) yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$v = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \bar{v}, \quad (15)$$

missä C_1, \dots, C_4 ovat integrointivakiot ja $\bar{v}(x)$ on eräs yksityisratkaisu. Kiertymälle (13), taivutusmomentille ja leikkausvoimalle saadaan

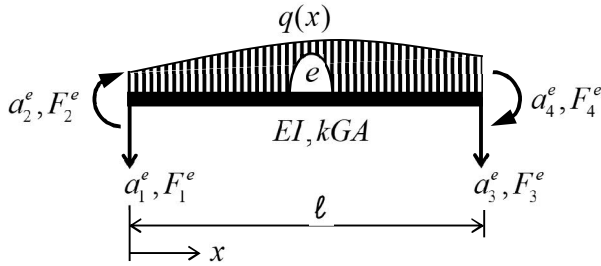
$$\theta = C_2 + 2C_3x + (3x^2 + 6\frac{EI}{kGA})C_4 + \bar{\theta}, \quad (16)$$

$$M \equiv -EI\theta' = -2EIC_3 - 6ElxC_4 + \bar{M}, \quad (17)$$

$$Q \equiv M' = -6EIC_4 + \bar{Q}. \quad (18)$$

Funktioita $\bar{\theta}(x)$, $\bar{M}(x)$ ja $\bar{Q}(x)$ kutsutaan tässä yksityisratkaisua $\bar{v}(x)$ vastaaviksi kiertymäksi, taivutusmomentiksi ja leikkausvoimaksi ja niillä on lausekkeet

$$\bar{\theta} = \bar{v}' + \frac{EI}{kGA}\bar{v}''' + \frac{EI}{(kGA)^2}q', \quad \bar{M} = -EI\bar{\theta}', \quad \bar{Q} = \bar{M}'. \quad (19)$$



Kuva 1: Timoshenko-palkkielementti

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista Timoshenko-palkkielementtiä. Vapausasteirtymiksi a_i^e $i = 1, \dots, 4$ otetaan taipumat ja kiertymät elementin päissä, jolloin vapausastevoimat F_i^e $i = 1, \dots, 4$ ovat niitä vastaavat voimasuureet. Yhteensopivuusehdot ja tasapainoehdot elementin päissä $x = 0$ ja $x = l$ ovat

$$a_1 = v(0), \quad a_2 = \theta(0), \quad a_3 = v(l), \quad a_4 = \theta(l), \quad (20)$$

$$F_1 = -Q(0), \quad F_2 = M(0), \quad F_3 = Q(l), \quad F_4 = -M(l). \quad (21)$$

Miinusmerkit yhtälöissä (21a) ja (21d) johtuvat siitä, että vapausastevoimien F_1 ja F_4 positiiviset suunnat ovat leikkausvoiman $Q(0)$ ja taivutusmomentin $M(l)$ suuntiin nähdessä vastakkaiset. Soveltamalla yhtälöitä (15)–(18) yhteensopivuusehdot (20) saadaan muotoon (2) ja tasapainoehdot (21) muotoon (3), missä

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6\frac{EI}{kGA} \\ 1 & 1 & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 + 6\frac{EI}{kGA} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\theta}(0) \\ \bar{v}(l) \\ \bar{\theta}(l) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6l \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} -\bar{Q}(0) \\ \bar{M}(0) \\ \bar{Q}(l) \\ -\bar{M}(l) \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Kun elementtiä kuormittaa tasan jakautunut kuorma $q = q_0$, yksityisratkaisu sekä sitä vastaavat kiertymä, leikkausvoima ja taivutusmomentti (19) ovat

$$\bar{v} = \frac{q_0}{24EI}x^4, \quad \bar{\theta} = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{EI}{kGA}x + \frac{1}{6}x^3\right), \quad \bar{M} = -q_0\left(\frac{EI}{kGA} + \frac{1}{2}x^2\right), \quad \bar{Q} = -q_0x. \quad (23)$$

Tämä malliprobleema on niin yksinkertainen, että elementin jäykkymatriisin lopullinen lauseke voidaan kohtuullisella työllä laskea kaavalla (6a). Tulokseksi saadaan

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{(1+\varphi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\varphi)l^2 & -6l & (2-\varphi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\varphi)l^2 & -6l & (4+\varphi)l^2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

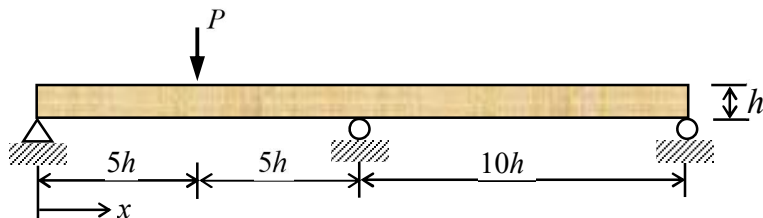
missä on käytetty dimensiotonta suuretta

$$\varphi = \frac{12EI}{kGA l^2}, \quad (25)$$

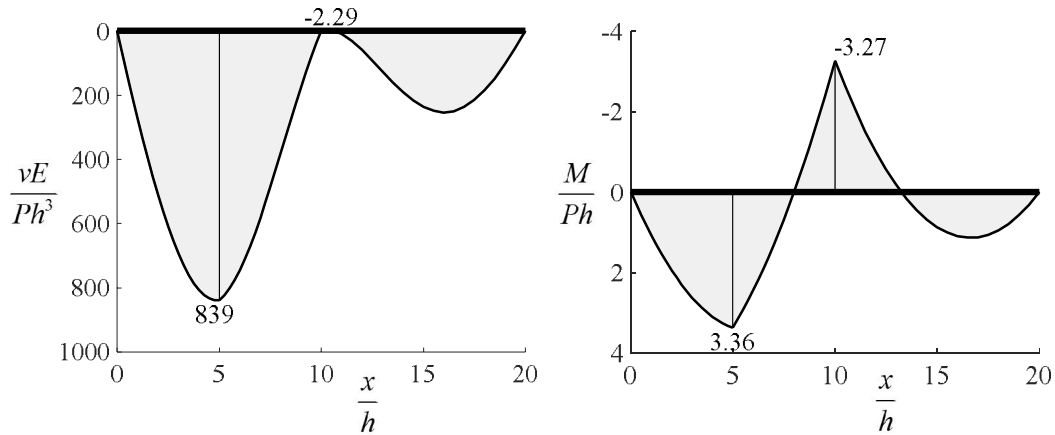
joka kuvaa taivutusjäykkyyden ja leikkausjäykkyyden suhdetta. Tulos (24) yhtyy Timoshenko-palkin jäykkymatriisiin, joka on esitetty lähteessä [1]. Jos $\varphi = 0$, on palkki leikkausjäykkä. Sijoituksella $\varphi = 0$ matriisista (24) tulee Euler–Bernoulli palkkielementin jäykkymatriisi (vrt. [2], s. 26). Esitetty elementti soveltuu siis myös Euler–Bernoulli palkin ratkaisemiseen.

Esimerkki: Kaksiuukkoinen puupalkki

Kuvan 2 puupalkilla on suorakaiteen muotoinen poikkileikkaus, jonka korkeus on h ja leveys $b = h/2$. Puun kimmomoduuli on E , leikkausmoduuli $G = E/17$ ja poikkileikkauksen leikkauskorjauskerroin $k = 5/6$. Palkkia kuormittaa pistekuorma P ja sen omapaino on $q_0 = P/(5h)$. Palkin poikkipinnan alaksi ja jäyhyysmomentiksi saadaan helposti $A \equiv bh = h^2/2$ ja $I \equiv bh^3/12 = h^4/24$. Mallinnetaan palkkia käyttäen kolmea elementtiä ja neljää solmua kohdissa $x = 0, 5h, 10h, 20h$. Kuvassa 3 on esitetty dimensiottoman taipuman $vE/(Ph^3)$ ja taivutusmomentin $M/(Ph)$ jakaumat. Taulukossa 1 on esitetty taipuman ja taivutusmomentin suurimmat ja pienimmät arvot. Vertailun vuoksi laskelma suoritettiin myös otaksumalla palkin noudattavan Euler–Bernoulli-teoriaa ($\varphi = 0$). Tulokset on lisätty taulukkoon 1. Havaitaan, että Timoshenko-teorialla laskettu maksimi taipuma on 36,0 % suurempi kuin Euler–Bernoulli-teorialla laskettu. Maksimi taivutusmomentti on 2,4 % suurempi ja minimi taivutusmomentti itseisarvoltaan 4,9 % pienempi. Voidaan todeta, että Euler–Bernoulli-palkkiteoria ei anna riittävää tarkkuutta tällaisen puupalkin taipumalle. Myös taivutusmomentin arvot poikkeavat selvästi toisistaan.



Kuva 2: Kaksiuukkoinen puupalkki



Kuva 3: Kaksiaukkoisen puupalkin taipuma ja taivutusmomentti

Taulukko 1: Timoshenko- ja Euler–Bernoulli-palkkiteorioiden tulosten vertailu

	Timoshenko		Euler–Bernoulli	
	max	min	max	min
$vE / (Ph^3)$	839	-2.29	617	-38.9
$M / (Ph)$	3.36	-3.27	3.28	-3.44

Johtopäätökset

Tämän artikkelin tarkoituksena on ollut palauttaa tietoisuuteen rakenteiden mekaniikan matriisimenetelmien [1] yhteydessä muotoutunut käytäntö tarkkojen palkkielementtien formuloimiseksi ja saattaa se kompaktiin ja pedagogisesti selkeään muotoon.

Viitteet

- [1] J.S. Przemieniecki, Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [2] R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha, R.J. Witt, Concepts and Applications of Finite Element analysis, 4th ed., John Wiley & Sons, 2002.

Jukka Aalto
 Aalto-yliopisto, Insinöörityöiden korkeakoulu
 PL 12100, 00076 Aalto, Finland
 jukka.aalto@aalto.fi